ESERCIZI DI RIEPILOGO 1

Esercizio 1. Verificare che:

(i) $\frac{1}{2} \in \{x \in \mathbb{R},\ 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0\}$.
(ii) $3 \in \{x \in \mathbb{R},\ x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$.
(iii) $1 \in \{x \in \mathbb{R},\ -2 < 3x \leq 5\}$.

Esercizio 2. Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Sia $f : A \to B$ tale che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in A$.

(i) Se $A = B = \mathbb{R}$, f è surgettiva? f è iniettiva?
(ii) Se $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, f è iniettiva? f è surgettiva?
(iii) Se $A = B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, f è iniettiva? f è surgettiva?

Esercizio 3. Verificare che :

(i) $\{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq x \leq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 4\} = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq 3\}$
(ii) $\{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 4\} = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq x < 4\}$.

Esercizio 4. Sia f un'applicazione di A in B; X e Y siano due sottoinsiemi di A. Dimostrare che:

(i) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
(ii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Esercizio 5. Sia f un'applicazione di A in B; X' e Y' siano due sottoinsiemi di B e X sia un sottoinsieme di X. Dimostrare che:

(i) $f^{-1}(X' \cup Y') = f^{-1}(X') \cup f^{-1}(Y')$
(ii) $f^{-1}(X' \cap Y') = f^{-1}(X') \cap f^{-1}(Y')$
(iii) $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$
(iv) $f\big(f^{-1}(X')\big) = X'$.

Esercizio 6. Determinare il campo di esistenza della funzione $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

Esercizio 7. Provare che:

(i) se A è un sottoinsieme non vuoto e limitato di $\mathbb{R}$ dotato di estremo superiore e di estremo inferiore, si ha $\inf(A) \leq \sup(A)$.
(ii) se $A \subset B$ sono sottoinsiemi non vuoti e limitati di $\mathbb{R}$, e se B è dotato di estremo inferiore e di estremo superiore allora A è dotato di estremi inferorie e superiore. Di più, $\inf(A) \geq \inf(B)$ e $\sup(A) \leq \sup(B)$.
(iii) se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono sottoinsiemi non vuoti e limitati di $\mathbb{R}$, dotati di estremi inferiore e superiore, l'insieme $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ è dotato di estremi inferiore e superiore e si ha

$$\sup(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \max_{i=1,\ldots,n} \sup(A_i)$$
$$\inf(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \min_{i=1,\ldots,n} \inf(A_i)$$

Esercizio 8.

(i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^{2n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ è pari? Dispari?
(ii) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^{2n+1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ è pari? Dispari?
(iii) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ è pari? Dispari?

Esercizio 9.

(i) Determinare il limite (se esiste) della successione $(e^{n/2})_{n\in\mathbb{N}}$.
(ii) Determinare il limite (se esiste) della successione $(e^{-n/2})_{n\in\mathbb{N}}$.
(iii) Determinare il limite (se esiste) della successione $(\frac{3^n+2n+1}{2^n+4n+7})_{n\in\mathbb{N}}$.
(iv) Determinare il limite (se esiste) della successione $(\frac{e^{n/2}}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\frac{e^{n/2}}{n^2+n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.