DS7-MaPC2A(2)

On considère les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longrightarrow & P(1) \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

f et g sont-elles linéaires? En faire la démonstration.

Soit

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix} \end{array}$$

On admet que h est linéaire. Déterminer la matrice de h dans la base canonique. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Im}(h)$ et $\ker(h)$.

Correction

Montrons que f est linéaire

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(1) = \Big(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \lambda(b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3)\Big)(1) \\ &= \Big(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \lambda b_0 + \lambda b_1X + \lambda b_2X^2 + \lambda b_3X^3\Big)(1) \\ &= a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1^2 + a_3 \times 1^3 + \lambda b_0 + \lambda b_1 \times 1 + \lambda b_2 \times 1^2 + \lambda b_3 \times 1^3 \\ &= \Big(a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1^2 + a_3 \times 1^3\Big) + \lambda\Big(b_0 + \lambda b_1 \times 1 + \lambda b_2 \times 1^2 + \lambda b_3 \times 1^3\Big) \\ &= P(1) + \lambda Q(1) = f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

L'application g n'est pas linéaire

Car $g\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Application h

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ et :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$
$$h(e_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $A := \underset{\mathcal{C}}{mat}(h) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}$

Comme l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^3$, on détermine $\mathrm{Im}(h)$ en échelonnant-réduisant le système suivant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1\\ 1 & \text{-1} & y_2\\ 2 & 0 & y_3 \end{array}\right)\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$$

Ce qui donne après calcul :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y_1+y_2}{2}\\ 0 & 1 & \frac{y_2-y_1}{2}\\ 0 & 0 & -y_1-y_2+y_3 \end{array}\right)\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$$

Donc $\mathrm{Im}(h) = \{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad -y_1 - y_2 + y_3 = 0\}$.

De plus comme, il y a des pivôts dans la première et la deuxième colonne, la famille $\{h(e_1), h(e_2)\} = \{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\{$ est une base de $\mathrm{Im}(h)$ qui est donc de dimension 2.

Déterminer $\ker(h)$ revient à déterminer les solutions du système suivant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0\\ 1 & \text{-1} & 0\\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$$

ie

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$$

qui a pour solution $x = y = 0$.
Donc $\ker(h) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ a dimension 0.
On vérifie que le théorème du rang donne un résultat cohérent $(2 = 2 + 0)$.