

DS7-MaPC2A(1)

On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow P(1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f et g sont-elles linéaires? En faire la démonstration.

Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On admet que h est linéaire. Déterminer la matrice de h dans la base canonique. Déterminer les dimensions de $\text{Im}(h)$ et $\text{ker}(h)$.

Correction

Montrons que f est linéaire

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(1) = \left(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \lambda(b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) \right)(1) \\ &= \left(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \lambda b_0 + \lambda b_1X + \lambda b_2X^2 + \lambda b_3X^3 \right)(1) \\ &= a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1^2 + a_3 \times 1^3 + \lambda b_0 + \lambda b_1 \times 1 + \lambda b_2 \times 1^2 + \lambda b_3 \times 1^3 \\ &= \left(a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1^2 + a_3 \times 1^3 \right) + \lambda \left(b_0 + \lambda b_1 \times 1 + \lambda b_2 \times 1^2 + \lambda b_3 \times 1^3 \right) \\ &= P(1) + \lambda Q(1) = f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

L'application g n'est pas linéaire

$$\text{Car } g \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = g \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Application h

La base canonique de \mathbb{R}^2 est $\mathcal{C}\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$h(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A := \underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme l'espace d'arrivée est \mathbb{R}^3 , on détermine $\text{Im}(h)$ en échelonnant-réduisant le système suivant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & y_2 \\ 2 & 0 & y_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Ce qui donne après calcul :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y_1+y_2}{2} \\ 0 & 1 & \frac{y_2-y_1}{2} \\ 0 & 0 & -y_1 - y_2 + y_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(h) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad -y_1 - y_2 + y_3 = 0 \right\}.$$

De plus comme, il y a des pivôts dans la première et la deuxième colonne, la famille $\{h(e_1), h(e_2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\text{Im}(h)$ qui est donc de dimension 2.

Déterminer $\ker(h)$ revient à déterminer les solutions du système suivant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

ie

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

qui a pour solution $x = y = 0$.

Donc $\ker(h) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ a dimension 0.

On vérifie que le théorème du rang donne un résultat cohérent ($2 = 2 + 0$).