DS6-MaPC2A(2)

Soit $E = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases} \}$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Correction

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$

(i) $0_{\mathbb{R}^5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ car $\begin{cases} 0 + 2 \times 0 + 0 + 7 \times 0 = 0 \\ 0 - 2 \times 0 - 0 + 3 \times 0 = 0 \\ 0 + 2 \times 0 - 0 = 0 \\ 0 + 3 \times 0 - 3 \times 0 + 2 \times 0 + 5 \times 0 = 0 \end{cases}$.

(ii) Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in E$ (donc $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$)

et $v = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \end{pmatrix} \in E$ (donc $\begin{cases} x'_1 + 2x'_2 + x'_3 + 7x'_4 = 0 \\ x'_2 - 2x'_3 - x'_4 + 3x'_5 = 0 \\ x'_3 + 2x'_4 - x'_5 = 0 \\ x'_1 + 3x'_2 - 3x'_3 + 2x'_4 + 5x'_5 = 0 \end{cases}$)

et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u + \lambda v \in E$

$$u + \lambda v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x'_1 \\ x_2 + \lambda x'_2 \\ x_3 + \lambda x'_3 \\ x_4 + \lambda x'_4 \\ x_5 + \lambda x'_5 \end{pmatrix}$$

Or $(x_1+\lambda x'_1)+2(x_2+\lambda x'_2)+(x_3+\lambda x'_3)+7(x_4+\lambda x'_4) = (x_1+2x_2+x_3+7x_4)+\lambda(x'_1+2x'_2+x'_3+7x'_4) = 0+\lambda\times 0$.
Et de même

$$\begin{aligned} &(x_2 + \lambda x'_2) - 2(x_3 + \lambda x'_3) - (x_4 + \lambda x'_4) + 3(x_5 + \lambda x'_5) = 0 \\ &(x_3 + \lambda x'_3) + 2(x_4 + \lambda x'_4) - (x_5 + \lambda x'_5) = 0 \\ &(x_1 + \lambda x'_1) + 3(x_2 + \lambda x'_2) - 3(x_3 + \lambda x'_3) + 2(x_4 + \lambda x'_4) + 5(x_5 + \lambda x'_5) = 0 \end{aligned}$$

Finalement (i) et (ii) montrent que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

Base de E

Analyse

Soit $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in E$. Cela signifie que les coordonnées de u vérifient :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Trouver une base de E revient à échelonner réduire le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

On applique une méthode de pivôt au système suivant :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

On trouve après calcul :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

ce qui revient au système :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & & & -x_4 & -x_5 & = 0 \\ & x_2 & & +3x_4 & +x_5 & = 0 \\ & & x_3 & +2x_4 & -x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

Finalement $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 + x_5 \\ -3x_4 - x_5 \\ -2x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -3x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_5 \\ -x_5 \\ x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Synthèse

D'après la partie analyse et l'échelonnement réduction du système portant sur les conditions de E, la famille

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

est une base de E qui est donc de dimension 2.