DS6-MaPC2A(1)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, montrer que la famille

$$\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Correction

On échelonne-réduit la matrice

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\end{array}$$

et on obtient :

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\end{array}$$

Comme on obtient la matrice identité, la famille

$$\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Explications

Par définition, la famille de quatre vecteurs est une base de $\mathbb{R}^4$ si elle est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$.

- Montrons que la famille est libre. Soit λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ et supposons que :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

  On cherche à montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

  Mais la supposition est équivalente au système :

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

On sait par le précédent calcul que (4 pivôts) que l'on va obtenir :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

ce qui revient à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc la famille est libre.

- Concernant le caractère générateur, deux explications sont valables.

  La première se base sur le fait que l'espace engendré par 4 vecteurs libres est de dimension 4. En notant $V = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix})$ l'espace vectoriel engendré par la famille, on a donc :

$$\begin{cases} V \subset \mathbb{R}^4 \\ \dim(V) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \end{cases}$$

  donc $V = \mathbb{R}^4$ et la famille est donc génératrice.

  La deuxième explication utilise la définition de la génération.

  Soit $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ quelconque. On cherche $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

  Ce qui revient à résoudre le système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & \text{a} \\ 2 & 3 & 0 & 0 & \text{b} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \text{c} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \text{d} \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

  Mais puisqu'on sait que l'on a 4 pivôts pour ce système, le calcul va nécessairement aboutir pour donner λ, μ, σ et τ en fonction de a, b, c, d.

  Donc la famille est génératrice.