DS5-MaPC2A(2)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on définit les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ 2x+y=0\} \\
E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x+2y-z=0\} \\
E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ -x-y+2z=0\}
\end{aligned}$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Correction

<u>E_1 **et** E_2 **sont des sous-espaces vectoriels de** $\mathbb{R}^3$</u>

Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

(i) $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$ car $2 \times 0 + 0 = 0$

(ii) Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ (donc $2x+y=0$), $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in E_1$ (donc $2x'+y'=0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u + \lambda v \in E_1$

$$u + \lambda v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda x' \\ y+\lambda y' \\ z+\lambda z' \end{pmatrix}$$

Donc $u + \lambda v \in E_1$ si et seulement si $2(x+\lambda x') + (y+\lambda y') = 0$
Or $2x+y=0$ donc $y=-2x$ et $2x'+y'=0$ donc $y'=-2x'$.

Donc $2(x+\lambda x')+(y+\lambda y') = 2(x+\lambda x')+(-2x+\lambda(-2x') = 2x+2\lambda x'-2x-2\lambda x = 0$, le résultat attendu.

Finalement (i) et (ii) montrent que E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

(i) $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$ car $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$

(ii) Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ (donc $x + 2y - z = 0$), $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in E_2$ (donc $x' + 2y' - z' = 0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u + \lambda v \in E_2$

$$u + \lambda v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ y + \lambda y' \\ z + \lambda z' \end{pmatrix}$$

Donc $u + \lambda v \in E_2$ si et seulement si $(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') - (z + \lambda z') = 0$

Or $(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') - (z + \lambda z') = (x + 2y + z) + \lambda(x' + 2y' - z') = 0 + \lambda \times 0 = 0$, ce qui montre que $u + \lambda v \in E_2$.

Finalement (i) et (ii) montrent que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$ et montrons que $u = 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ autrement dit montrons que $x = y = z = 0$.

Comme u appartient en particulier à E_1 on a $2x + y = 0$.
Comme u appartient en particulier à E_2 on a $x + 2y - z = 0$.
Comme u appartient en particulier à E_3 on a $-x - y + 2z = 0$.
On peut rassembler les conditions sur x, y, z dans le système linéaire suivant que l'on résout par une méthode de pivôt (toujours à lire de gauche à droite et de haut en bas).

$$(E)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On a donc

$$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

et l'unique possibilité pour $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$ est que $x = y = z = 0$, ce que l'on voulait montrer.