DS5-MaPC2A(1)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on définit les sous-ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x - 3y = 0\}$$
$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x - 4y = 0\}$$

1. Montrer (rapidement) que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$.

Correction

E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

(i) $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$ car $0 - 3 \times 0 = 0$

(ii) Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1$ (donc $x - 3y = 0$), $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E_1$ (donc $x' - 3y' = 0$).

Montrons que $u + v \in E_1$. En effet :

$$u + v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

ie $u + v \in E_1$ si et seulement si $(x + x') - 3(y + y') = 0$.
Or $x - 3y = 0$ donc $x = 3y$ et $x' - 3y' = 0$ donc $x' = 3y'$.

Donc $(x + x') - 3(y + y') = (3y + 3y') - 3(y + y') = 0$, le résultat attendu.

(iii) Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lambda u \in E_1$. En effet :

$$\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

ie $\lambda u \in E_1$ si et seulement si $\lambda x - 3\lambda y = 0$
Or $x - 3y = 0$ donc $\lambda x - 3\lambda y = \lambda 3y - 3\lambda y = 0$, le résultat attendu.

Finalement (i), (ii) et (iii) montrent que E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

(i') $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$ car $0 - 4 \times 0 = 0$

(ii') Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2$ (donc $x - 4y = 0$), $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E_2$ (donc $x' - 4y' = 0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u + \lambda v \in E_2$. En effet :

$$u + \lambda v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ y + \lambda y' \end{pmatrix}$$

Donc $u + \lambda v \in E_2$ si et seulement si $(x + \lambda x') - 4(y + \lambda y') = 0$.
Or $(x + \lambda x') - 4(y + \lambda y') = (x - 4y) + \lambda(x' - 4y') = 0 + \lambda \times 0 = 0$, ce qui montre que $u + \lambda v \in E_2$.

Finalement (i') et (ii') montrent que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$

Rappel : par définition : $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$ si :

1. $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
2. $E_1 + E_2 := \{u + v | u \in E_1, v \in E_2\} = \mathbb{R}^2$

Montrons les deux étapes :

1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \cap E_2$. Donc :

   $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$ Ce qui donne, après résolution par une méthode de Gauss, $x = y = 0$.

   Donc l'intersection entre E_1 et E_2 est réduite au vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre 1.

2. Analyse :

   Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On cherche $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E_1$ (ie $x_1 - 3y_1 = 0$) et $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in E_1$ (ie $x_2 - 4y_2 = 0$) tels que

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

   Cela donne les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_2 = \alpha \\ y_1 + y_2 = \beta \\ x_1 - 3y_1 = 0 \\ x_2 - 4y_2 = 0 \end{cases}$$

   que l'on résout matriciellement par une méthode de pivôt de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \beta \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \text{ Ce qui donne après calcul : } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha + 12\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha + 4\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\alpha - 12\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha - 3\beta \end{array}\right)$$

Synthèse : n'importe quelle vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ s'écrit comme somme du vecteur $u = \begin{pmatrix} -3\alpha + 12\beta \\ -\alpha + 4\beta \end{pmatrix} \in E_1$ et du vecteur $v = \begin{pmatrix} 4\alpha - 12\beta \\ \alpha - 3\beta \end{pmatrix} \in E_2$. Donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$.

Finalement, $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$.