DS4-MaPC2A(2)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de a, le rang et le noyau de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour quel $a \in \mathbb{R}$ la matrice A est inversible (on ne demande pas de calculer l'inverse).

Déterminer en fonction de a, le nombre de solutions du système linéaire suivant (on ne demande pas de les calculer explicitement) :

$$(E) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 1 \\ ax & + & y & + & az & = & 2 \\ a^2x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Correction

Rang et noyau de A

On détermine le rang et le noyau de A en échelonnant le système suivant:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & 0 \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_2 \end{array}$$

Deux cas se présentent :

- Si $1-a^2 \neq 0$, il y a trois pivôts et $\mathrm{rang}(A) = 3$. L'échelonnement réduction donne finalement que A est semblable à : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $\ker(A) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

- Si $1-a^2 = 0$, alors $a = 1$ ou $a = -1$.

  (i) Si $a = 1$, A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rang}(A) = 1$ et $\ker(A) = \{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}\}$

  (i) Si $a = -1$, A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rang}(A) = 1$ et $\ker(A) = \{ \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}\}$

Résolution du système linéaire

Cela revient à calculer un échelonnement du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a & 2 \\ a^2 & a & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & 2-a \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 & 1-a^2 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & 2-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-2a \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_2 \end{array}$$

Selon les deux cas déterminés en première question :

- Si $1-a^2 \neq 0$, il y a trois pivôts. On peut terminer la réduction et on trouve une solution unique.
- Si $1-a^2 = 0$, alors $a = 1$ ou $a = -1$.

  (i) Si $a = 1$, on a le système suivant :

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

  qui est incompatible. Donc $S_{a=1} = \emptyset$.

  (i) Si $a = -1$,on a le système suivant :

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

  qui est aussi incompatible. Donc $S_{a=-1} = \emptyset$.