DS4-MaPC2A(1)

Trouver l'inverse de la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système linéaire suivant

$$(E) \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & & & = & 1 \\ 4x & + & 2y & + & 4z & = & -3 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Correction

<u>Inverse de C</u>

1er étape : échelonnement de la matrice $(C|I_3)$, lire les étapes de gauche à droite et de haut en bas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

2eme étape : réduction de la matrice $(C|I_3)$, lire les étapes de gauche à droite et de haut en bas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array}$$

La partie réduction est terminée (pas de coefficient non nul au dessus du deuxième pivôt utilisé). Finalement,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Résolution de (E)

On met le système sous forme matricielle et on applique la méthode du pivôt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

De là, soit on conclut directement que le système n'a pas de solution, soit on revient à un système linéaire.

$$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & 1 \\ & 2y & & = & 1 \\ & 0 & & = & -8 \end{array}\right.$$

La dernière ligne, n'ayant pas de solution, le système linéaire (E) n'a pas de solution.