DS3-MaPC2A(2)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer le noyau des matrices précédentes (version équation et version paramétrique). Donner aussi leur rang, le nombre de paramètres de leur noyau et le nombre de leurs colonnes.

Correction

Matrice A

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(A)$, par définition, cela signifie que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & + & -6x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Autrement dit, déterminer $\ker(A)$, c'est résoudre le système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise une méthode de Gauss afin d'échelonner réduire la matrice précédente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & -12 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

En revenant au variable $x_1, \ldots, x_4$, on obtient :

$$\ker(A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 5x_3 + 5x_4 & = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = 0 \end{array} \right. \} = \{ \begin{pmatrix} -5x_3 - 5x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

2 pivôts ont été utilisés dans l'échelonnement-réduction donc $\text{rg}(A) = 2$, $\ker(A)$ s'exprime en fonction de 2 paramètres et $2 + 2 = 4$, le nombre de colonnes de A.

Matrice B

De même, on échelonne-réduit le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{5} L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 7L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2' - L_3 \\ L_2' \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array}$$

En revenant au variable $x_1, \dots, x_3$, on obtient :

$$\ker(B) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

3 pivôts ont été utilisés dans l'échelonnement-réduction donc $\mathrm{rg}(B) = 3$, $\ker(B)$ s'exprime en fonction de 0 paramètre et $3 + 0 = 3$, le nombre de colonnes de B.