DS3-MaPC2A(1)

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 7 \\ 3 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Déterminer le noyau des matrices précédentes (version équation et version paramétrique). Donner aussi leur rang, le nombre de paramètres de leur noyau et le nombre de leurs colonnes.

Correction

Matrice A

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(A)$, par définition, cela signifie que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & -x_2 & & -2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ -2x_1 & & & & -2x_3 & & -3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Autrement dit, déterminer $\ker(A)$, c'est résoudre le système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise une méthode de Gauss afin d'échelonner réduire la matrice précédente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow -L_1 \\ \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

En revenant au variable $x_1, \dots, x_4$, on obtient :

$$\ker(A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{array} \right. \} = \{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_3 \in \mathbb{R} \}$$

3 pivôts ont été utilisés dans l'échelonnement-réduction donc $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\ker(A)$ s'exprime en fonction de 1 paramètres et $1 + 3 = 4$, le nombre de colonnes de A.

Matrice B

De même, on échelonne-réduit le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & -9 & 12 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array}$$

En revenant au variable $x_1, \dots, x_3$, on obtient :

$$\ker(B) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + \frac{5}{3}x_3 & = 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 & = 0 \end{array} \right. \} = \{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}x_3 \\ \frac{4}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

2 pivôts ont été utilisés dans l'échelonnement-réduction donc $\mathrm{rg}(B) = 2$, $\ker(B)$ s'exprime en fonction de 1 paramètre et $2 + 1 = 3$, le nombre de colonnes de B.