# DS2-MaPC2A(2)

Échelonner réduire les matrices suivantes et donner leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

## Correction

### Échelonnement réduction de $A$

**1er étape : échelonnement de $A$**

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On cherche un élément non nul dans la colonne la plus à gauche. Le coefficient $-1$ à la deuxième ligne convient.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On le place en première position sur la colonne de gauche en intervertissant la première et la deuxième ligne.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On peut multiplier la première ligne par $-1$ pour rendre le pivôt égal à 1 (pour faciliter le calcul).

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On se sert du pivôt pour éliminer les termes de la première colonne (en-dessous du pivôt).

$$\begin{array}{l}\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

Maintenant que la première colonne est réduite, on passe à la sous-matrice encadrée.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ \hline \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Sur la colonne la plus à gauche de cette sous-matrice, on cherche un pivôt. Le coefficient $-1$ convient.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ \hline \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On rend le pivôt égal à 1.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ \hline \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On élimine les termes en-dessous du nouveau pivôt.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

Maintenant que la deuxième colonne est réduite, on passe à la sous-matrice encadrée.

$$\left(\begin{array}{cc|cc|} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -5 \\ \hline \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Il n'y a qu'un seul choix de pivôt. On fait une nouvelle opération pour mettre ce nouveau pivôt à 1.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array}$$

**2eme étape : réduction de $A$**

On élimine les termes au dessus du dernier pivôt utilisé.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}$$

On fait de même avec l'avant dernier pivôt utilisé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On revient alors au tout premier pivôt utilisé, l'algorithme s'arrête.
Une forme échelonnée réduite de $A$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y eu 3 pivôts utilisés pour échelonner $A$ donc $\text{rang}(A) = 3$.

__Échelonnement réduction de $B$__

**1er étape : échelonnement de $B$ (lire les étapes de gauche à droite et de haut en bas)**

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \end{array}$$

**2eme étape : réduction de $B$**

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Donc la forme échelonnée réduite de $B$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y eu 3 pivôts utilisés pour échelonner $B$ donc $\mathrm{rang}(B) = 3$.