DS2-MaPC2A(1)

Échelonner réduire les matrices suivantes et donner leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

Échelonnement réduction de A

1er étape : échelonnement de A

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On cherche un élément non nul dans la colonne la plus à gauche. Le coefficient -1 à la deuxième ligne convient.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On le place en première position sur la colonne de gauche en intervertissant la première et la deuxième ligne.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On peut multiplier la première ligne par -1 pour rendre le pivôt égal à 1 (pour faciliter le calcul).

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On se sert du pivôt pour éliminer les termes de la première colonne (en-dessous du pivôt).

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

Maintenant que la première colonne est réduite, on passe à la sous-matrice encadrée.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{-2} \\ 0 & \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Sur la colonne la plus à gauche de cette sous-matrice, on cherche un pivôt. Le coefficient 2 convient.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On rend le pivôt égal à 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On élimine les termes en-dessous du nouveau pivôt.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

Maintenant que la deuxième colonne est réduite, on passe à la sous-matrice encadrée.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Il n'y a qu'un seul choix de pivôt. On fait une nouvelle opération pour mettre ce nouveau pivôt à 1.

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2 \\
L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3
\end{array}
$$

2eme étape : réduction de A

On élimine les termes au dessus du dernier pivôt utilisé.

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\
L_3
\end{array}
$$

On fait de même avec l'avant dernier pivôt utilisé.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
L_2 \\
L_3
\end{array}
$$

On revient alors au tout premier pivôt utilisé, l'algorithme s'arrête.
Une forme échelonnée réduite de A est

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
$$

Il y eu 3 pivôts utilisés pour échelonner A donc $\text{rang}(A) = 3$.

<u>Échelonnement réduction de B</u>

1er étape : échelonnement de B (lire les étapes de gauche à droite et de haut en bas)

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & -2 \\
2 & -2 & 0 \\
-2 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2 \\
L_3 \\
L_4
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix}
-1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & -2 \\
2 & -2 & 0 \\
-2 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2 \\
L_3 \\
L_4
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_4 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \end{array}$$

2eme étape : réduction de B

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Donc la forme échelonnée réduite de B est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y eu 3 pivôts utilisés pour échelonner B donc $\mathrm{rang}(B) = 3$.